Cours d'**Algèbre Bilinéaire**[1]

Prof. AKEKE E. D.

1. Licence 2 Maths, Université des Lagunes, 2021-2022

Table des matières

Chapitre 1

DUALITE

Par la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Rappelons que $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui même et on a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$.

1.1 Définitions et propriétés

1.1.1 Espace dual d'un espace vectoriel

Définition 1.1.1 *L'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ s'appelle l'espace dual de E et se note E^*. Les éléments de E sont appelés* ***formes linéaires*** *sur E ou covecteurs.*

Exemples

1. L'application de E dans $\mathbb{K}$, qui à tout vecteur $x \in E$ associe le scalaire $0 \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire, appelé forme nulle sur E.
2. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. L'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$ est une forme linéaire sur E.
3. Si E est l'espace vectoriel des suites de réels convergentes, alors $u \mapsto \lim u_n$ est une forme linéaire sur E.
4. Soit X un ensemble non vide et $\mathbb{K}^X = \{u : X \to \mathbb{K}\}$ Alors $\mathbb{K}^X$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et pour tout $x_0 \in X$, $\quad f_{x_0} : u \in \mathbb{K}^X \to u(x_0) \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire (appelé l'évaluation en x_0).

5. Si $E=\mathbb{K}[X]$, pour tout $a\in\mathbb{K}$, l'application $P\mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur E.

Remarque 1.1.1 *Soient $x\in E$ et $\varphi\in E^*$. Il est commode de noter $<x,\varphi>$ le scalaire $\varphi(x)$. L'application $<,>: E\times E^*\longrightarrow\mathbb{K}$ qui à (x,φ) associe $<x,\varphi>$ vérifie les propriétés suivantes :*

i) $<x,\varphi_1+\varphi_2>=<x,\varphi_1>+<x,\varphi_2>$

ii) $<x_1+x_2,\varphi>=<x_1,\varphi>+<x_2,\varphi>$

iii) $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda<x,\varphi>=<\lambda x,\varphi>=<x,\lambda\varphi>$

On résume ces propriétés en disant que cette application $<,>$ est une forme bilinéaire de $E\times E^*$ dans $\mathbb{K}$. Cette forme est appelée ***la forme bilinéaire canonique*** *sur $E\times E^*$.*

1.1.2 Transposée d'une forme linéaire

Définition 1.1.2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et E^*, F^* les espaces duaux respectifs. Soit $f:E\longrightarrow F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire.*
On appelle transposée de f et on note ${}^tf$ l'application ${}^tf:F^*\longrightarrow E^*$ définie par

$$ {}^tf(\varphi)=\varphi\circ f $$

pour tout $\varphi\in F^*$.

On a donc la formule mécanique suivante : pour tout $x\in E$, $\varphi\in F^*$,

$$ <x,{}^tf(\varphi)>=<f(x),\varphi> $$

Si E, F et G sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow G$ sont des applications linéaires, on a

$$ {}^t(g\circ f)={}^tf\circ{}^tg \qquad \text{et} \qquad {}^tId_E=Id_{E^*} $$

De plus, l'application $L(E,F)\longrightarrow L(F^*,E^*)$ définie par $f\longmapsto{}^tf$ est linéaire.

1.1.3 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 1.1.3 *Soit A une partie non vide de l'espace vectoriel E. On appelle* ***orthogonal*** *de A dans E^* et on note $A^\perp$ l'ensemble des formes linéaires φ sur E telles que $\varphi(x)=0$ pour tout $x\in A$. Autrement dit*

$$ A^\perp=\{\,\varphi\in E^*\,/\,\varphi(x)=0,\,\forall\,x\in A\,\} $$

De même, si B est une partie de E^*, l'orthogonal de B dans E noté $B^\perp$ est

$$ B^\perp=\{\,x\in E\,/\,\varphi(x)=0,\,\forall\,\varphi\in B\,\}. $$

Proposition 1.1.1 .

i) Pour toute partie A de E, l'orthogonal $A^{\perp}$ de A dans E^* est un sous-espace vectoriel de E^*.

ii) Pour toute partie B de E^*, l'orthogonal $B^{\perp}$ de B dans E est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

i) Soit $\lambda \in K$ et φ, $\phi \in A^{\perp}$. Pour tout $x \in A$, on a

$$(\varphi + \lambda\,\phi)(x) = \varphi(x) + \lambda\phi(x) = 0$$

car $\varphi(x) = 0$ et $\phi(x) = 0$. Donc $\varphi + \lambda\,\phi \in A^{\perp}$.

ii) Soit $\lambda \in K$ et x, $y \in B^{\perp}$. Pour tout $\varphi \in B$, on a

$$\varphi(x + \lambda\,y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y) = 0$$

donc $x + \lambda\,y \in B^{\perp}$.

Propriétés 1 *Pour toutes parties A et B de E, on a*

i) $A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

ii) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$

(iii) $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$

iv) $(vect(A))^{\perp} = A^{\perp}$.

De même,

Propriétés 2 *Pour toutes parties A et B de E^*, on a*

i) $A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

ii) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$

(iii) $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$

iv) $(vect(A))^{\perp} = A^{\perp}$.

Exercice 1 *Prouver les propriétés ci-dessus.*

Proposition 1.1.2 *Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a l'égalité*

$$\ker({}^t f) = (Im(f))^{\perp}.$$

Preuve
On sait que

$$\ker({}^t f) = \{\, \varphi \in F^* \,/\, {}^t f(\varphi) = 0 \,\}$$

or

$${}^t f(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow \varphi \circ f = 0 \Longleftrightarrow \varphi(f(x)) = 0, \quad \forall\, x \in E \Longleftrightarrow \varphi(y) = 0, \quad \forall\, y \in Im(f)$$

Par conséquent, on a

$$\ker({}^t f) = \{\, \varphi \in F^* \,/\, \varphi(y) = 0, \forall y \in Im(f) \,\} = (Im(f))^{\perp}.$$

Exercice 2 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère les applications suivantes : $\varphi_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_1(P) = 2P(1)+P'(0)$ et $\varphi_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_2(P) = \int_0^1 P(t)dt$, $\varphi_3 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_3(P) = P(-1)$, pour tout $P \in E$.*
1) Prouver que φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes linéaires sur E.
2) On pose $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Déterminer l'orthogonale de B^* dans E.

1.1.4 Bidual d'un espace vectoriel

Définition 1.1.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'espace dual de E^* s'appelle l'espace bidual de E et se note E^{**}.*

Montrons qu'il existe une application (canonique) de E dans E^{**}. Soit $x \in E$.

L'application de E^* dans $\mathbb{K}$ définie par $\varphi \longmapsto \varphi(x)$ est une forme linéaire sur E^*. Désignons par $\tilde{x}$ cette application linéaire. Il n'est pas difficile de voir que l'application $J : E \longrightarrow E^{**}$ définie par $x \longmapsto \tilde{x}$ est $\mathbb{K}$-linéaire. Par définition, l'application J est **l'application canonique** de E dans son bidual E^{**}.

1.2 Dualité en dimension finie

1.2.1 Bases duales

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1.2.1 *L'espace dual E^* de E est de dimension finie et on a*

$$\dim E = \dim E^*.$$

Preuve
On sait que $\dim L(E, \mathbb{K}) = \dim E$, d'où $\dim E^* = \dim E$.

Posons $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (\, e_1,\, \ldots,\, e_n \,)$ une base de E. Considérons les n formes linéaires $(\, e_1^*,\, \ldots,\, e_n^* \,)$ définies par :

$$e_{ij}^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Montrons qu'elles sont indépendantes. Soient $\lambda_1,\, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i^* = 0_{E^*}.$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i^*(e_j) = \lambda_j$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$. D'où $\lambda_j = 0$. Ainsi, la famille $\{\, e_1^*,\, \ldots,\, e_n^* \,\}$ est une famille de n vecteurs libres de E^*, c'est par conséquent une base de E^*.

Définition 1.2.1 *La base $\mathcal{B}^* = (\, e_1^*,\, \ldots,\, e_n^* \,)$ ci-dessus est par définition* ***la base duale*** *de la base $\mathcal{B} = (\, e_1,\, \ldots,\, e_n \,)$ de E.*

Exemple
Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1,\, e_2,\, e_3)$ la base canonique de E. Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'application $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $e_i^*(x_1, x_2, x_3) = x_i$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est la base duale de la base $\mathcal{B}$.

Remarque 1.2.1 *(important !)*

Soit $x \in E$. On sait que dans la base $\mathcal{B}$, le vecteur x s'écrit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j$ où $x_j \in \mathbb{K}$ pour $j = 1, \ldots, n$. On a

$$e_i^*(x) = e_i^*(\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_i^*(e_j) = x_i$$

Pour cette raison la forme e_i^* est appelée la i-ème forme coordonnée relative à la base $\mathcal{B}$ de E.

Exercice 3 *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, de dégré ≤ 2.*
Notons $\mathcal{B} = (e_0 = 1,\ e_1 = X,\ e_2 = X^2)$ la base canonique de E.

Soient $P_0 = 1,\ P_1 = 2\,X + 1,\ P_2 = (X-1)^2$.

1) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de E.

2) Déterminer la base duale $\mathcal{C}^*$ de la base $\mathcal{C}$.

Théorème 1.2.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. L'application canonique de E dans son bidual E^{**} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Preuve
On sait que $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$. Soit $\mathcal{B} = (\,e_1,\ \ldots, e_n\,)$ une base de E.
Soient $x,\ y \in E$. Les vecteurs x et y s'écrivent $x = \sum_{j=1}^n x_j\, e_j$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j\, e_j$ où $x_j,\ y_j \in \mathbb{K}$. Supposons que $\tilde{x} = \tilde{y}$. Pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi(x) = \varphi(y)$. Donc $\varphi(x-y) = 0,\ \forall\, \varphi \in E^*$, en particulier, pour tout élément e_i^* de la base duale $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B}$ de E, on a $e_i^*(x-y) = 0$, d'où $x_i - y_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Ainsi $x = y$. D'où l'injection.
En somme l'application canonique J est un isomorphisme.

A l'aide de cet isomorphisme $J : E \longrightarrow E^{**}$, on peut identifier les espaces E et E^{**}.

i) Toute propriété démontrée pour le couple (E, E^*) est valable pour le couple (E^*, E^{**}) ou (E^*, E).

ii) Lorque E est de dimension finie, il y a une parfaite symétrie entre les rôles de E et E^*. Ainsi, les bases $(e_1,\ \ldots, e_n)$ et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sont dites **duales** l'une de l'autre.

Théorème 1.2.2 *(Changement de base)*
Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$ les bases duales respectives de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la $\mathcal{B}'$ alors :
${}^tP$ est inversible, ${}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$ et ${}^tP$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$.

Théorème 1.2.3 *Soient E un espace vectoriel de dimension* ***finie***, *H un sous-espace vectoriel de E et $H^\perp$ l'orthogonal de H dans E^*. Alors, on a*

$$\dim H + \dim H^\perp = \dim E.$$

De même, si H est un sous-espace vectoriel de E^*, on a

$$\dim H + \dim H^\perp = \dim E.$$

Preuve

posons $n = \dim E$ et $p = \dim H$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de H. On a

$$H^{\perp} = \{\varphi \in E^* \,/\, \varphi(e_i) = 0,\, \forall\, i = 1, \dots, p\}$$

Or $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*$ où $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ désigne la base duale de la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Pour tout $i = 1, \dots, p$, on a

$$0 = \varphi(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*(e_i) = \lambda_i.$$

Ainsi φ s'écrit

$$\varphi = \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k^*.$$

Donc $H^{\perp} = Vect(\{e_{p+1}^*, \dots, e_p^*\})$, les vecteurs $e_{p+1}^*, \dots, e_p^*$ étant libres dans E^*, donc $\dim H^{\perp} = n - p$. Ainsi

$$\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E.$$

De même, si H est un sous-espace vectoriel de E^* on a

$$\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E^* = \dim E.$$

Corollaire 1.2.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. H un sous-espace vectoriel de E. Alors on a*

$$(H^{\perp})^{\perp} = H.$$

De même, si H est un sous-espace vectoriel de E^*, on a

$$(H^{\perp})^{\perp} = H.$$

Preuve

Nous avons vu que $H \subset (H^{\perp})^{\perp}$. De plus

$$\dim H + \dim H^{\perp} = \dim H^{\perp} + \dim (H^{\perp})^{\perp} = \dim E.$$

Donc $\dim H = \dim (H^{\perp})^{\perp}$ et $H \subset (H^{\perp})^{\perp}$. On en déduit que $H = (H^{\perp})^{\perp}$.

Théorème 1.2.4 *Soint E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Si on identifie les espaces avec leurs biduaux alors :*

i) si $f \in L(E,F)$ et ${}^t f$ est la transposée de f, on a

$$rang(f) = rang({}^t f)$$

ii) Pour tout $f \in L(E,F)$, ${}^t({}^t f) = f$.
iii) Si f est un isomorphisme de E sur F alors ${}^t f$ est un isomorphisme de F^* sur E^* et on a

$$({}^t f)^{-1} = {}^t f^{-1}.$$

iv) Si $\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}^*$ la base duale de $\mathcal{C}$ alors

$$M_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

***En particulier**, si $E = F$ et A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ alors la matrice de ${}^t f$ dans la base $\mathcal{B}^*$ est ${}^t A$.*

1.2.2 Hyperplans vectoriels

Définition 1.2.2 *Dans un espace vectoriel de dimension finie égale n, tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ s'appelle un **hyperplan vectoriel**.*

Dans le cas où F est un s.e.v quelconque de E, le nombre $n - \dim F$ s'appelle la **codimension** de F et se note $Codim\, F$.
les hyperplans vectoriels sont exactement les s.e.v de E de codimension 1.

Soit φ un élément non nul de E^* et soit $D = vect(\varphi)$ le sous-espace vectoriel de E^* engendré par φ. On a $\dim D = 1$ et l'orthogonal $D^\perp$ de D dans E est

$$D^\perp = \{\, x \in E \,/\, \varphi(x) = 0 \,\}.$$

On remarque que $D^\perp = ker\, \varphi$ le noyau de φ. On sait de plus que

$$\dim D^\perp + \dim D = \dim E.$$

Donc $\dim D = \dim E - 1$ et $D^\perp$ est un hyperplan de E.

Proposition 1.2.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et H un sous-ensemble de E.*
H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Preuve(exercice !)

Chapitre 2

Formes bilinéaires symétriques - Formes quadratiques

2.1 Formes bilinéaires symétriques

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. On note $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$.

Définition 2.1.1 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un élément $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ est dit **homogène** de degré k si*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad P(\lambda X) = \lambda^k P(X).$$

Les polynômes $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ homogènes de degré 2 sont exactement les polynômes de la forme

$$P = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} X_i X_j$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Définition 2.1.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme bilinéaire sur E est par définition une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad \forall u, v, w \in E, \quad f(a\, u + b\, v, w) = a\, f(u, w) + b\, f(v, w)$

2) $\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad \forall u, v, w \in E, \quad f(u, a\, v + b\, w) = a\, f(u, v) + b\, f(u, w)$

Si de plus, on a la propriété suivante :

3) $\forall u, v \in E, \quad f(u, v) = f(v, u),$

on dit que f est une forme bilinéaire symétrique.

Exemples
1) $E = I([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. L'application ψ définie sur $E \times E$ par $\psi(f,g) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

2) $E = \mathbb{R}[X]$. L'application φ définie sur $E \times E$ par $\varphi(P,Q) = P(0)\,Q(1)$ est une forme bilinéaire sur E. Cette forme n'est pas symétrique .

Remarque 2.1.1 *Pour montrer qu'une forme φ est bilinéaire symétrique, il suffit de montrer que φ est symétrique et l'une des propriétés 1) ou 2) de la définition 2.1.2.*

On suppose à présent que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soient $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur E et $x,\, y \in E$. On sait que x et y s'écrivent $x = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j\, e_j$ avec $x_i,\, y_j \in \mathbb{K}$. On a

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i\, y_j\, \varphi(e_i, e_j) \qquad (*)$$

Rappelons que $\forall\, i,\, j \in \{1,\ldots,n\}$, on a $\varphi(e_i,e_j) = \varphi(e_i,e_j)$ car φ est symétrique. On en déduit que

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i,e_i)\, x_i\, y_i + \sum_{1\le i<j\le n} \varphi(e_i,e_j)\,(x_i\, y_j + x_j\, y_i).$$

$\forall\, i,\, j \in \{1,\ldots,n\}$, on pose $a_{ij} = \varphi(e_i,\, e_j)$. Alors

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall\, i,\, j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Définition 2.1.3 *La matrice associée à la forme bilinéaire symétrique φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est la matrice carrée A d'ordre n de terme général $a_{ij} = \varphi(e_i,e_j)$.*
Cette matrice carrée est symétrique c'est à dire,

$${}^tA = A.$$

Exemple

$E = \mathbb{R}^3$. Soit $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. L'application de $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$(\sum_{i=1}^3 x_i\, e_i,\, \sum_{j=1}^3 y_j\, e_j) \longmapsto 3\,x_1\,y_1 - 4\,x_2\,y_2 + 2\,x_1\,y_2 + 2\,x_2\,y_1 - 5\,x_3\,y_2 - 5\,x_2\,y_3 - x_3\,y_3.$$

La matrice A associée à f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si B est une matrice symétrique d'ordre $n = \dim E$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ alors la matrice B définit sur l'espace vectoriel E la forme bilinéaire symétrique $\psi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j) \longmapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{ij}\, x_i\, y_j$$

Expression matricielle

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur E. On note $A = \varphi(e_i, e_j)$ la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne correspondant à $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne correspondant à $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$ alors on a

$$\varphi(x, y) = {}^tX\, A\, Y = {}^tY\, A\, X.$$

Formule de changement de base

Théorème 2.1.1 *Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ deux bases de E.*
Si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ et P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ alors on a

$$A' = {}^tP\, A\, P.$$

On a en particulier

$$rang(A) = rang(A').$$

Preuve
Soit x, $y \in E$. Notons X, Y (resp. X', Y') les matrices colonnes de x, y dans la base $\mathcal{B}$

(resp. $\mathcal{B}'$). On sait que $X = P\,X'$ et $Y = P\,Y'$. D'où

$$f(x,y) = {}^tX'A'Y' = {}^tXAY = ({}^tX'\,{}^tP)\,A\,(PY') = {}^tX'\,({}^tP\,A\,P)\,Y'.$$

On en déduit que $A' = {}^tP\,A\,P$ puisque la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est unique.

Exercice 4 *On dit que deux marices A, B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont congruentes, s'il existe une matrice inversible P telle que $A' = {}^tP\,A\,P$. Montrer que la congruence est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(K)$.*

Exercice 5 *Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ définie par $e_1' = (1,1)$, $e_2' = (1,-1)$ et f définie par*

$$f(u,v) = x_1x_2 + y_1y_2$$

pour tout $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
1) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
2) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3) Calculer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Définition 2.1.4 *Par définition, le **rang** de la forme bilinéaire symétrique φ est le rang de la matrice de φ dans une base de E.*

Définition 2.1.5 *Soit φ une forme bilinéaire symétrique φ sur E.*
*On dit que φ est **non-dégenerée** si rang$(\varphi) = \dim E$.*
*Si rang$(\varphi) < \dim E$ on dit φ que est **dégénérée.***

Remarque 2.1.2 *La forme bilinéaire symétrique φ sur E est non-dégénérée si, et seulement si, la matrice A de φ dans une base quelconque de E est inversible. Ce qui équivaut à dire que $\det(A) \neq 0$.*

2.2 Formes quadratiques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$.

Définition 2.2.1 *Une forme quadratique sur E est une application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ dont l'expression dans une base de E est un polynôme homogène de degré 2 (c'est à dire si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe des scalaires $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tels que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ on a $q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j$) et il existe une forme bilinéaire symétrique f sur E telle que $\forall\, x \in E, \quad q(x) = f(x,x)$.*

Par exemple, l'application $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\sum_{i=1}^{4} x_i\, e_i \longmapsto q(x) = x_1^2 - 3\, x_3^2 + x_1\, x_2 - 3\, x_2\, x_3 + x_4^2$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.

Théorème 2.2.1 *Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une application.*
q est une forme quadratique si et seulement si q vérifie les propriétés suivantes

1) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, x \in E, \quad q(\lambda\, x) = \lambda^2 q(x)$

2) l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est une forme bilinéaire symétrique

Définition 2.2.2 *Soit $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur E.*

Alors l'application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad q(x) = b(x,x)$$

est une forme quadratique sur E. C'est par définition la forme quadratique associée à la forme bilinéaire b.

Définition 2.2.3 *Si q est une forme quadratique sur E alors l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par*

$$\forall\, x,\, y \in E, \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E. C'est par définition la ***forme polaire*** *de q.*

Remarque 2.2.1 *L'ensemble $S(E)$ des formes bilinéaires symétriques est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De même l'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application qui associe à une forme quadratique q sa forme polaire est un isomorphisme de $Q(E)$ sur $S(E)$*

Par conséquent toute notion associée à la forme quadratique q est aussi associée à sa forme polaire b. Par exemple, le rang de la forme quadratique q est le rang de sa forme polaire b.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur E.

On sait que la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A carrée d'ordre n, de terme général $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

Si $x = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j\, e_j$ avec x_i, $y_j \in \mathbb{K}$, on a

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_i)\, x_i\, y_i \; + \sum_{1 \le i < j \le n} \varphi(e_i, e_j)\, (\, x_i\, y_j + x_j\, y_i).$$

Si q est la forme quadratique associée à φ on a $q(x) = \varphi(x, x)$, donc

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_i)\, x_i^2 \; + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \varphi(e_i, e_j)\; x_i\, x_j.$$

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial\, q}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_k)\, x_i.$$

L'application $\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial\, q}{\partial x_k}$ qui associe à $x = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i$ le scalaire

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_k)\, x_i$$

est une forme linéaire sur E, c'est à dire un élément de l'espace dual E^* de E.

Dans la base dual $(\, e_1^*, \dots, e_n^*)$ de la base $\mathcal{B} = (\, e_1, \dots, e_n)$ on a pour tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial\, q}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_j)\, e_i^*$$

On déduit le résultat suivant.

Théorème 2.2.2 *La matrice A associée à la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice des n formes linéaires $\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial\, q}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$ dans la base $(\, e_1^*, \dots, e_n^*)$.*

Exemple

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère sur $\mathbb{R}^4$ la forme quadratique q définie par

$$q(x) = 3\,x_1^2 - 2\,x_3^2 + x_4^2 + 4\,x_1\,x_2 + 3\,x_1\,x_3 + 2\,x_3\,x_4$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

On a
$\dfrac{\partial q}{\partial x_1} = 6\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3$ et $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial q}{\partial x_1} = 3\,x_1 + 2\,x_2 + \dfrac{3}{2}\,x_3$
$\dfrac{\partial q}{\partial x_2} = 4\,x_1$ et $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial q}{\partial x_2} = 2\,x_1$
$\dfrac{\partial q}{\partial x_3} = 3\,x_1 - 4\,x_3 + 2\,x_4$ et $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial q}{\partial x_3} = \dfrac{3}{2}\,x_1 - 2\,x_3 + x_4$
$\dfrac{\partial q}{\partial x_4} = 2\,x_4 + 2\,x_3$ et $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial q}{\partial x_4} = x_3 + x_4$.

La matrice A de la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Orthogonalité

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur E

Définition 2.3.1 *(i) Les vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux relativement à φ si*

$$\varphi(x, y) = 0$$

On écrit alors $x \perp y$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

(ii) Deux parties non vides A, B de E sont dites orthogonales si, pour tout couple $(x, y) \in A \times B$, on a $\varphi(x, y) = 0$.

(iii) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'élements de E est dite orthogonale si :

$$\forall\, i, j \in I, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \varphi(x_i, x_j) = 0$$

Définition 2.3.2 *Pour tout partie A de E, l'orthogonal de A dans E relativement à φ, noté $A^\perp$ est*

$$A^\perp = \{\, x \in E \,/\, \varphi(x, y) = 0, \forall\, y \in A\}$$

Propriétés 3 *Soient A, B des parties de E. On a les propriétés suivantes.*

1) $A^{\perp}$ *est un sous espace vectoriel de E.*

2) $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$

3) $A^{\perp} + B^{\perp} \subset (A \cap B)^{\perp}$

4) $\{0\}^{\perp} = E$.

5) $A^{\perp} = < A >^{\perp}$

6) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$

Proposition 2.3.1 *Si F est un sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ de E alors on a*

$$F^{\perp} = \{ x \in E \,/\, \varphi(u_i, x) = 0, \; \forall\, i = 1, \ldots, k\}.$$

Théorème 2.3.1 *Si F est un sous-espace vectoriel de E alors*

$$\dim F + \dim F^{\perp} \geq \dim E$$

Définition 2.3.3 *Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur E.*
Le Noyau , noté $\ker(\varphi)$, de φ est le sous-ensemble de E défini par

$$\ker(\varphi) = \{ x \in E \,/\, \varphi(x, y) = 0, \forall\, y \in E\}.$$

Remarque 2.3.1 *Remarquons que le noyau $\ker(\varphi)$ de E est un sous-espace vectoriel de E et on a*

$$\ker(\varphi) = E^{\perp}.$$

Théorème 2.3.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension **finie** et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur E. Alors*

$$\varphi \quad \text{est non-dégénérée} \quad \Leftrightarrow \quad \ker(\varphi) = \{0\}$$

Théorème 2.3.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension **finie** et q une forme quadratique sur E, **non-dégénérée** et F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

i) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$

ii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

Définition 2.3.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique q. Un vecteur $x \in E$ est dit **isotrope** pour q si $q(x) = 0$.*

*Le **cône isotrope** de la forme quadratique q est l'ensemble des vecteurs isotropes, notés $cone(q)$,*

$$cone(q) = \{\, x \in E \,/\, q(x) = 0 \,\}$$

Un sous-espace H de E est dit isotrope si $H \cap H^{\perp} = 0$

Définition 2.3.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension **finie**, $\dim E = n$. Une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite **base orthogonale** pour la forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ si*

$$\forall\, i, j = 1, \ldots, n \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \varphi(e_i, e_j) = 0$$

*la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite **base orthonormale** pour φ si*

$$\varphi(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Théorème 2.3.4 ***(Fondamental)***
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$.
Pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur E, il existe au moins une base orthogonale dans E pour φ.

Preuve
Notons q la forme quadratique associée à f et raisonnons par récurrence sur la dimension de E.
Si $\dim E = 1$, le résultat est trivial.
Supposons le résultat acquis pour tout espace vectoriel de dimension (n-1) muni d'une forme bilinéaire symétrique. Soit f une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension n. Appelons q la forme quadratique associée.
1er cas : $q = 0$, le théorème est trivial., puisqu'ainsi toute base est orthogonale.
2-ème cas : $q \neq 0$.
Soit $e_1 \in E$ tel que $q(e_1) \neq 0$. Notons F la droite vectorielle engendrée par e_1. Alors $F^{\perp}$ est le noyau de la forme linéaire qui à x associe $f(x, e_1)$. Cette forme est non nulle puisque $q(e_1) \neq 0$. Ainsi $F^{\perp}$ est un hyperplan de E ne contenant pas e_1. On en déduit que $F \oplus F^{\perp} = E$.
La restriction de f à $F^{\perp} \times F^{\perp}$ est encore une forme bilinéaire symétrique. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $F^{\perp}$, il existe une base $(e_2, \ldots, e_n)$ dans $F^{\perp}$ orthogonale pour φ. Il s'ensuit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale de E.

Remarque 2.3.2 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de E pour φ.*
Si $x = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j\, e_j$ alors

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_i)\, x_i\, y_i$$

et on a

$$q(x) = \varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_j)\ x_i^2$$

La matrice de f relativement à cette base est ainsi une matrice diagonale. Les termes de la diagonale principale étant $\varphi(e_1, e_1), \ldots, \varphi(e_n, e_n)$.

Corollaire 2.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Il existe une base de E telle que la matrice de φ relativement à cette base soit une matrice diagonale.*

Preuve
D'après le théorème 2.3.4, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E orthogonale pour φ et on sait que la matrice A de φ dans cette base est la matrice carrée d'ordre n, de terme générale

$$a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$$

Cette matrice est diagonale car $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.

Remarque 2.3.3 *Le rang de cette matrice diagonale $A = \varphi(e_i, e_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est égal au nombre de scalaires non nuls de la diagonale principale.*

2.4 Classification des formes quadratiques

Définition 2.4.1 *Deux formes quadratiques q_1 et q_2 sur E sont dites équivalentes si il existe une application linéaire bijective (un automorphisme) $f : E \longrightarrow E$ tel que*

$$\forall\, x \in E, \quad q_1(f(x)) = q_2(x).$$

On écrit alors $q_1 \sim q_2$.

En terme matriciel, les formes quadratiques q_1 et q_2 sur E sont dites équivalentes si il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E telles que
si A est la matrice de q_1 dans la base $\mathcal{B}_2$ et $A^{'}$ la matrice de q_2 dans la base $\mathcal{B}_1$ et M la matrice de f reltivement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ alors

$$A^{'} = {}^{t}M\, A\, M$$

Théorème 2.4.1 *Toute forme quadratique q sur $\mathbb{C}^n$ de rang r est équivalente à la forme quadratique $q^{'}$ telle*

$$q^{'}(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$$

Preuve (cf. cours)

Corollaire 2.4.1 *Pour toute forme quadratique q non-dégénérée sur $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^n$ il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et dans une telle base, on a*

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

BN : le corolaire 2.4.1 est faux si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Théorème 2.4.2 ***(Loi d'inertie de Sylvester)***
Soit q un forme quadratique de rang r sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Alors il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i \, e_i \in E$ on a

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

où p, $p \leq r$ est un entier naturel qui ne dépend que de la forme quadratique q.

Les formes quadratiques sur $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sont donc classifiées par les couples d'entiers

$$(p, r-p)$$

où r est le rang de la forme quadratique.

L'entier p désigne le nombre de termes carrés précédés du signe (+) et $r-p$ le nombre de termes carrés précédés du signe (-).

Définition 2.4.2 *Le couple (p,r-p) est appelé la* ***signature*** *de la forme quadratique q.*

Remarque 2.4.1 *Si (p, m) est la signature de la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ alors le rang de q est*

$$rang(q) = p + m.$$

Corollaire 2.4.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie,* $\dim E = n$.

Les formes quadratiques sur E qui admettent une base orthonormée sont exactement les formes quadratiques de signature $(n, 0)$.

Soit $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, $\dim E = n$.

Définition 2.4.3 *Une forme quadratique q sur E de rang r est*

1) ***positive*** *si sa signature est $(r, 0)$.*

2) ***négative*** *si sa signature est $(0, r)$.*

3) ***définie positive*** *si sa signature est $(n, 0)$.*

4) ***définie négative*** *si sa signature est $(0, n)$.*

Théorème 2.4.3 *Soit q une forme quadratique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E*

$$q \quad \text{est définie positive} \quad \Leftrightarrow \quad q \text{ est positive} \quad \text{et} \quad q \quad \text{est non-dégénérée.}$$

$$q \quad \text{est définie positive} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in E \setminus \{0\}, \quad q(x) > 0.$$

2.5 Réduction en somme de carrés (Somme de carrés de Gauss)

Soit $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, $\dim E = n$.

La décomposition en somme de carrés de Gauss permet d'exprimer une forme quadratique sur E en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. On en déduit une base orthogonale pour la forme polaire de la forme quadratique.

Soient $q : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme quadratique sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Dans la base $\mathcal{B}$, on a pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \in E$

$$q(x) = \sum_{i \leq i, j \leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

avec $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

<u>1^{ier} **cas**</u> : $q(x)$ **contient au moins un terme carrée** :

on peux supposer que $a_{11} \neq 0$. Alors $q(x)$ est de la forme

$$q(x) = a_{11}\, x_1^2 + x_1\, R(x_2, \cdots, x_n) + S(x_2, \cdots, x_n)$$

où $R(x_2, \cdots, x_n)$ est une forme linéaire en $x_2, \cdots, x_n$ et
$S(x_2, \cdots, x_n)$ une forme quadratique en $x_2, \cdots, x_n$. On a

$$q(x) = a_{11}\, x_1^2 + x_1\, R + S$$

On déduit que

$$q(x) = a_{11}\, (x_1 + \frac{R}{2\, a_{11}})^2 - \frac{R^2}{4\, a_{11}} + S$$

On pose alors $U_1 = x_1 + \dfrac{R}{2\, a_{11}}$ et $T = -\dfrac{R^2}{4\, a_{11}} + S$. Ainsi

$$q(x) = a_{11}\, U_1^2 + T$$

où T définit une forme quadratique en $x_2, \cdots, x_n$.

<u>$2^{\text{ième}}$ **cas**</u> : $q(x)$ **ne contient pas de termes carrées** :

on suppose $a_{12} \neq 0$. Alors $q(x)$ est de la forme

$$q(x) = 2\ a_{12}\, x_1\, x_2 + x_1\, R(x_3, \cdots, x_n) + x_2\, S(x_3, \cdots, x_n) + T(x_3, \cdots, x_n)$$

où $R(x_3, \cdots, x_n)$ est une forme linéaire en $x_3, \cdots, x_n$,
$S(x_3, \cdots x_n)$ est une forme linéaire en $x_3, \cdots, x_n$ et $T(x_3, \cdots, x_n)$ une forme quadratique en $x_3, \cdots, x_n$. On a

$$q(x) = 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + x_1\, R + x_2\, S + T$$

On déduit que

$$q(x) = 2\, a_{12}\, (x_1\, x_2 + x_1 \frac{R}{2\, a_{12}} + x_2\, \frac{S}{2\, a_{12}}) + T$$

Ainsi

$$q(x) = 2\, a_{12}\, (x_1 + \frac{S}{2\, a_{12}})\, (x_2 + \frac{R}{2\, a_{12}}) - \frac{S\, R}{2\, a_{12}} + T$$

Posons $X = x_1 + \dfrac{S}{2\, a_{12}}$ et $Y = x_2 + \dfrac{R}{2\, a_{12}}$. On a donc

$$q(x) = 2\, a_{12}\, X\, Y - \frac{S\, R}{2\, a_{12}} + T.$$

Rappelons que pour tout a, $b \in \mathbb{K}$, on a

$$a\, b = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2].$$

On en déduit que

$$q(x) = \frac{a_{12}}{2}\,[(x_1 + x_2 + \frac{S}{2\,a_{12}} + \frac{R}{2\,a_{12}})^2 - \frac{a_{12}}{2}(x_1 + \frac{S}{2\,a_{12}} - x_2 - \frac{R}{2\,a_{12}})^2] - \frac{R\,S}{2\,a_{12}} + T$$

où $-\dfrac{R\,S}{2\,a_{12}} + T$ est une forme quadratique en $x_3, \ldots, x_n$.

Exercice 6 *(d'applications)*
Décomposer en somme de carrées de Gauss les formes quadratiques suivantes. En déduire, pour chaque forme, une base orthogonale.

1) $E = \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$
$q(x) = x_1^2 - 3\,x_3^2 + 5\,x_1\,x_2 + x_1\,x_3$

2) $E = \mathbb{R}^4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
$q(x) = x_2^2 + x_1\,x_2 - 2\,x_1\,x_3 + x_2\,x_3 + x_3\,x_4$

Chapitre 3

Espaces euclidiens

3.1 Définitions

Rappelons qu'une forme bilinéaire symétrique b sur E est positive (resp. définie positive) si la forme quadratique associée à q est positive (resp. définie positive) ie,

$$\forall\, x \in E, \quad q(x) \geq 0 \quad (\text{resp.} \quad \forall\, x \in E \setminus \{0\}, \quad q(x) > 0)$$

Théorème 3.1.1 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***
*Soit f une forme bilinéaire symétrique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Si f est **positive** sur E alors*

$$\forall\, x,\, y \in E, \quad (f(x,y))^2 \leq f(x,x)\, f(y,y)$$

avec égalité si x et y sont liés dans E, c'est à dire $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda\, y$.

Preuve
On a $f(x+\lambda\, y, x+\lambda\, y) \geq 0$ ((cas où f est définie possitive) avec égalité ssi $x+\lambda\, y = 0$.Ainsi

$$f(y,y)\, \lambda^2 + 2\, f(x,y)\, \lambda + f(x,x) \geq 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \qquad (*).$$

Le discriminant est $\triangle = 4\, f(x,y)^2 - 4\, f(x,x)\, f(y,y)$. Comme l'équation $(*)$ n'a que des racines réelles, on a nécessairement

$$\triangle \leq 0.$$

On en déduit que

$$(f(x,y))^2 \leq f(x,x)\, f(y,y).$$

Théorème 3.1.2 ***(Inégalité de Minkowski)***
Soit q une forme quadratique positive sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E alors

$$\forall\, x,\, y \in E, \quad \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

Preuve

Soit f la forme polaire de q. On a

$$q(x+y) = f(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2\, f(x,y)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $f(x,y) \leq \sqrt{q(x)}\,\sqrt{q(y)}$.
Il s'ensuit que

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + 2\, f(x,y) \leq q(x) + q(y) + 2\,\sqrt{q(x)}\,\sqrt{q(y)}$$

donc $\forall\, x,\, y \in E, \quad \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$.

Définition 3.1.1 *Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit que f définit un **produit scalaire** sur E si f est définie positive sur E, c'est à dire que*

$$\forall\, x \in E \setminus \{0\}, \quad f(x,x) > 0.$$

Exemples
1) Soit $E = \mathbb{R}^n$, $q : (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2$. Alors q est une forme quadratique définie positive, on en déduit : pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\sum_{i=1}^n x_i\, y_i| \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}})\,(\sum_{i=1}^n y_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

ii) Soit E l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$ et q définie par : $f \longrightarrow \int_a^b (f(t))^2\, dt$ est une forme quadratique positive, on en déduit :

$$|\int_a^b f(t)g(t)\, dt| \leq (\int_a^b (f(t))^2\, dt)\, dt)^{\frac{1}{2}}\,(\int_a^b (g(t))^2\, dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 3.1.1 *Soit f une f.b.s sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie,* $\dim E = n$. *Alors*

$$f \quad \textit{est un produit scalaire sur } E \quad \Leftrightarrow \quad \textit{la signature de } f \textit{ est} \quad (n, 0).$$

Définition 3.1.2 *Un **espace euclidien** est, par définition, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension **finie**, muni d'un produit scalaire.*

Si (E, f) est un espace euclidien, le scalaire $f(x,y)$ est souvent noté

$$f(x,y) = < x, y > .$$

3.2 Norme et distance

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien sur E. Alors

Proposition 3.2.1 *L'application* $||.|| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$||x|| = \sqrt{< x, x >}$ *est une norme sur* E*, c'est à dire que*

1) $\| x \| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad \| \lambda x \| = |\lambda| \ \| x \|.$

3) $\forall x, y \in E, \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Définition 3.2.1 *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien sur* E.
Le scalaire $||x - y||$ *est par définition la* ***distance*** *de* $x \in E$ *à* $y \in E$*. On écrit souvent* $d(x, y) = \| x - y \|$.

Définition 3.2.2 *Soit* $(E, <,>)$ *un espace euclidien sur* E *et* A *une partie non vide de* E *et* $x \in E$*. La distance de* x *à* A *notée* $d(x, A)$ *est*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Remarque 3.2.1 *1) Dans un espace euclidien* $(E, <,>)$ *l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit*

$$< x, y > \leq \| x \| \| y \| .$$

2) Tout espace euclidien $(E, <,>)$ *admet une base orthonormée.*

A partir d'une base quelconque de $(E, <,>)$, on peut construire une base orthonormée de $(E, <,>)$.

Exercice 7 *Soit* a *un nombre réel. Soit* q *la forme quadratique définie sur* $E = \mathbb{R}^3$ *par :*

$$\forall v = (x, y, z) \in E, \quad q(v) = x^2 + (1 + a)\, y^2 + (1 + a + a^2)\, z^2 + 2\, x\, y - 2\, a\, y\, z.$$

1.

a) Donner l'expression de la forme polaire ψ *de* q.

b) Donner le rang et la signature de q *suivant les valeurs de* a*. Pour quelles valeurs de* $a \in \mathbb{R}$ *la forme* ψ *est-elle un produit scalaire ?*

3.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On construit une **base orthogonale** $\mathcal{B}' = \{u_1, \cdots, u_n\}$ de E de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 \\ u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{< e_k, u_i >}{< u_i, u_i >} u_i, \qquad \forall\, k = 2, \ldots, n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on pose

$$\varepsilon_i = \frac{u_i}{\| u_i \|}.$$

Alors $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une **base orthonormée** de E.

Exercice 8 *Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}_4[X]$. On définit sur E l'application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$f(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

1) Montrer que (E, f) est un espace euclidien.
2) Construire une base orthonormée de (E, f).

3.4 Projection orthogonale

Théorème 3.4.1 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $E = F \oplus F^{\perp}$, c'est à dire, on a*

$$E = F + F^{\perp} \quad et \quad F \cap F^{\perp} = \{0\}$$

En particulier,

$$\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$$

Corollaire 3.4.1 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $x \in E$ il existe un unique vecteur $x_1 \in F$ tel que*

$$x - x_1 \in F^{\perp}$$

L'application $p_F : E = F \oplus F^\perp \longrightarrow F$ qui associe à $x = x_1 + x_2$ de vecteur x_1 est par définition la **projection orthogonale** de E sur F parallèlement à $F^\perp$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ une base orthonormale de F et $x \in E$.

On sait que x s'écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. Le vecteur x_1 s'écrit $x_1 = \sum_{i=1}^k a_i\, e_i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$< x, e_j > = < x_1 + x_2, e_j > = < x_1, e_j >$$

car $< x_2, e_j >= 0$. D'autre part,

$$< x_1, e_j >= \sum_{i=1}^k a_i \ < e_i, e_j >= \ a_j$$

On déduit que

$$x_1 = \sum_{i=1}^k \ < x, e_i > \ e_i.$$

Théorème 3.4.2 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $x \in E$, on a*

$$d(x, F) = d(x, x_1)$$

où x_1 est le projété orthogonal de x sur F.

Preuve
On a $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$. Pour tout $y \in F$ on a

$$\| x - y \| = \| x - x_1 + x_1 - y \| \ .$$

Par conséquent $\| x - y \|^2 = \| x - x_1 \|^2 + 2 \ < x_2, x_1 - y > + \| x_1 - y \|^2$. Ainsi

$$\| x - y \|^2 = \| x - x_1 \|^2 + \| x_1 - y \|^2 \geq \| x - x_1 \|^2 \ .$$

D'où

$$d(x, y) \geq d(x, x_1).$$

Comme $x_1 \in F$, on a

$$d(x, F) = d(x, x_1).$$

Exercice 9 *Soit* $E = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ *l'espace vectoriel des fonctions polynômes à une variable, de degré inférieur ou égal à deux, à coefficients dans* $\mathbb{R}$.
On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ *par*

$$\varphi(P, Q) = P(-1)\,Q(-1) + P(0)\,Q(0)\; + P(1)\,Q(1)$$

i) Montrer que cette application est un produit scalaire sur E.

ii) Quelle est la matrice de φ *dans la base canonique* $\mathcal{B} = (1,\, X,\, X^2)$ *de* $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$.

iii) On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \,/\, P(1) = 0\,\}$.
a) Justifier que l'ensemble F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ *et déterminer l'orthogonal* $F^{\perp}$ *de* F *dans* $\mathbb{R}^3$.
b) Calculer la distance du vecteur $Q = 2 + X$ *au sous-espace* F.

3.5 Endomorphismes adjoints

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$, $b : E \times E \longrightarrow E$ une forme bilinéaire symétrique sur E et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E.

Il existe un **unique** endomorphisme u^* de E, appelé **adjoint** de u, tel que

$$\forall\, x,\, y \in E \quad b(u(x), y) = b(x, u^*(y)).$$

Propriétés 4 *Soient* u, v *des endomorphismes de* E *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*
1) $(u + v)^* = u^* + v^*$
2) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
3) $(\lambda\, u)^* = \lambda\, u^*$
4) $(u^*)^* = u$
5) Si de plus u *est inversible alors* u^* *est inversible et on a*

$$(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$$

Définition 3.5.1 *Un endomorphisme* u *de* E *est dit symétrique pour la forme bilinéaire symétrique* b *si on a*

$$u = u^*.$$

Théorème 3.5.1 *Soient* $(E, <, >)$ *un espace euclidien,* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base orthonormée de* E *et* $u : E \longrightarrow E$ *un endomorphisme de* E. *Alors*

1) Les matrices de u et u^* sont transposées l'une à l'autre.

2) Pour que u soit symétrique pour $<,>$ il faut et il suffit que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit symétrique.

3.6 Automorphisme orthogonal

Définition 3.6.1 *Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. On dit que f est un* ***automorphisme orthogonal*** *(ou une* ***isométrie vectorielle****) si*

$$\forall\, x,\, y \in E, \quad < f(x), f(y) >=< x, y > .$$

Théorème 3.6.1 *Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1) $f : E \longrightarrow E$ est un automorphisme orthogonal,

2) $\forall\, x \in E, \quad \| f(x) \| = \| x \|$,

3) pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E , $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E,

4) il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Définition 3.6.2 *Une matrice carrée A d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une* ***matrice orthogonale*** *si*

$${}^tA\, A = I_n$$

où ${}^tA$ est la transposée de A.

Remarque 3.6.1 *Si A est une matrice orthogonale alors* $\det A = 1$ *ou* $\det A = -1$

Théorème 3.6.2 *L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté $O(n, \mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif et un sous-groupe du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles d'ordre n.*

C'est par définition le ***groupe orthogonal*** *(de $\mathbb{R}^n$).*

Théorème 3.6.3 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien.*
Une matrice de passage entre deux bases orthonormées de E est une matrice orthogonale.

Théorème 3.6.4 *Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. Alors*
Pour que u soit un automorphisme orthogonal de E, il faut et il suffit que sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$ soit une matrice orthogonale.

3.7 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Proposition 3.7.1 *Soit A une matrice carrées d'ordre n, à coefficients* ***réels****. Si A est symétrique alors les valeurs propres de A considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont toutes réelles.*

Preuve
Posons $A = (a_{ij})$. Soit λ une valeur propre de A (A étant considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$). Soit X un vecteur colonne propre de u (donc aussi a priori complexe) associé à λ. Posons $X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$ où $\overline{x_1}$ désigne le conjugué de x_i. Considérons l'expression ${}^tXA\overline{X}$. Puisque A est symétrique, on a :

$$ {}^tXA\overline{X} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i\overline{x_i} + \sum_{i>j} a_{ij}\,(x_i\overline{x_j} + \overline{x_i}x_j). $$

Les coefficients a_{ij} étant réels, ${}^tXA\overline{X}$ est son propre conjugué, donc ${}^tXA\overline{X}$ est un nombre réel. On a de plus, $M = {}^tM$, d'où ${}^tXM = {}^tX\,{}^tM = {}^t(MX)$. Mais $MX = \lambda\, X$, on en déduit

$$ {}^tXM\overline{X} = {}^t(\lambda\, X)\overline{X} = \lambda\,{}^tX\overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \lambda\,{}^tX\overline{X} $$

d'où $\lambda = \frac{{}^tXM\overline{X})}{{}^tX\overline{X}} \in \mathbb{R}$, car quotient d'un nombre réel par un nombre réel non nul. les valeurs propres de A considérée comme matrice complexe. sont donc toutes réelles

Proposition 3.7.2 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E Si f est un endomorphisme symétrique alors les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.*

Preuve Soient λ, μ deux valeurs propres distinctes de f et u, v deux vecteur propres associés respectivement à λ et μ. On a

$$< f(x), y >=< \lambda x, y >= \lambda < x, y > .$$

D'autre part, on a

$$< x, f(y) >=< x, \mu y >= \mu < x, y > .$$

Or, f est symétrique, dòu $\lambda < x, y >= \mu < x, y >$ et comme $\lambda \neq \mu$ on en déduit $< x, y >= 0$. Les sous-espaces propres E_λ et E_μ sont donc orthogonaux.

Théorème 3.7.1 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f. Ainsi f est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f.*

Corollaire 3.7.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe une matrice* ***orthogonale*** *P et une matrice* ***diagonale*** *$D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que*

$$A = P\, D\, {}^tP.$$

On exprime cela en disant que A est diagonalisable dans le groupe orthogonal.

Exercice 10 *Diagonaliser, en trouvant une base orthogonale de vecteurs propres, les matrices réelles suivantes.*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$